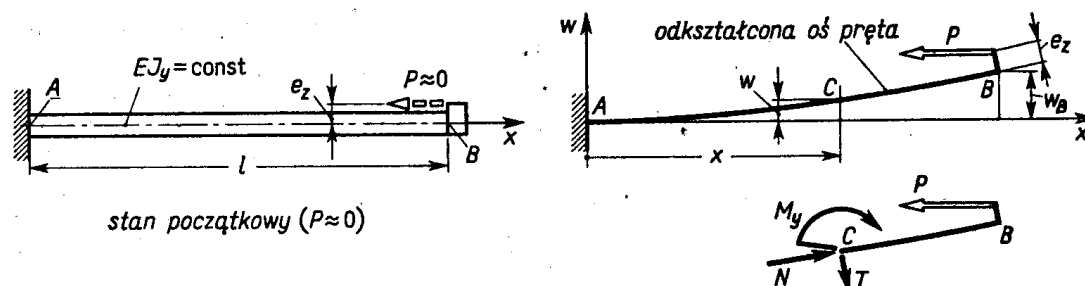


### 6.3. Mimośrodowe ściskanie prętów smukłych

Rozważania art. 6.2 oparte były na założeniu, że przy zginaniu z udziałem sił wzdłużnych można stosować zasadę superpozycji. Jak udowodnimy poniżej, założenie to jest słuszne, jeśli odkształcenia wywołane tym obciążeniem są pomijalne, czyli że można stosować regułę wymiarów początkowych (art. 1.3). Inna jest sytuacja przy mimośrodowym ścisnaniu pręta smukłego (rys. 6.17), gdyż ugięcie  $w$ , aczkolwiek małe, może być rzędu mimośrodu  $e_z$ . W tym przypadku musimy rozwiązać zagadnienie uwzględniając ugięcie pręta. Dla od-



Rys. 6.17. Analiza mimośrodowego ściskania pręta smukłego

dzielonego myślowo odcinka  $BC$  z równania równowagi momentów otrzymujemy<sup>(1)</sup>

$$M_y = P(e_z + w_B - w). \quad (a)$$

Jak widać, moment ten jest funkcją  $e_z$  i nie znanego na razie ugięcia  $w(x)$ , oraz nie znanego też  $w_B = (w)_{x=l}$ . Z drugiej strony wiemy, że w stanie równowagi, w którym przecież pręt się znajduje, dla każdej współrzędnej  $x$  jest spełniona zależność (5.20)

$$w'' = M_y/EJ_y, \quad (b)$$

która po podstawieniu wyrażenia (a) przybiera postać

$$w'' + k_y^2 w = k_y^2 (e_z + w_B), \quad (6.11)$$

gdzie czynnik  $k_y$  (miano  $\text{cm}^{-1}$ ) określony jest jako

$$k_y = \sqrt{\frac{P}{EJ_y}}. \quad (6.12)$$

Łatwo sprawdzić, że rozwiązanie równania różniczkowego (6.11) jest

$$w = C_1 \sin k_y x + C_2 \cos k_y x + e_z + w_B \quad (c)$$

i zawiera stałe całkowania  $C_1$  i  $C_2$  oraz nie znaną wartość  $w_B$ . Wszystkie te wielkości wyznaczymy z trzech warunków brzegowych

$$w_{x=0} = 0, \quad (dw/dx)_{x=0} = 0, \quad (w)_{x=l} = w_B.$$

I tak z dwóch pierwszych wynika

$$C_2 = -(e_z + w_B), \quad C_1 = 0,$$

a z trzeciego po podstawieniu powyższych wartości

$$w_B = (e_z / \cos k_y l) - e_z. \quad (d)$$

<sup>(1)</sup> Ramię siły  $P$  względem punktu  $B$  jest  $e_z \cos \vartheta_B$ . Gdy ugięcia są małe, wówczas  $\cos \vartheta_B$  różni się od jedności o małą wyższego rzędu i dlatego w równaniu (a) zamiast  $e_z \cos \vartheta_B$  jest  $e_z$ .

Wstawiając wielkości  $C_1$ ,  $C_2$  i  $w_B$  do równania (c) mamy

$$w = \frac{e_z}{\cos k_y l} (1 - \cos k_y x) \quad (e)$$

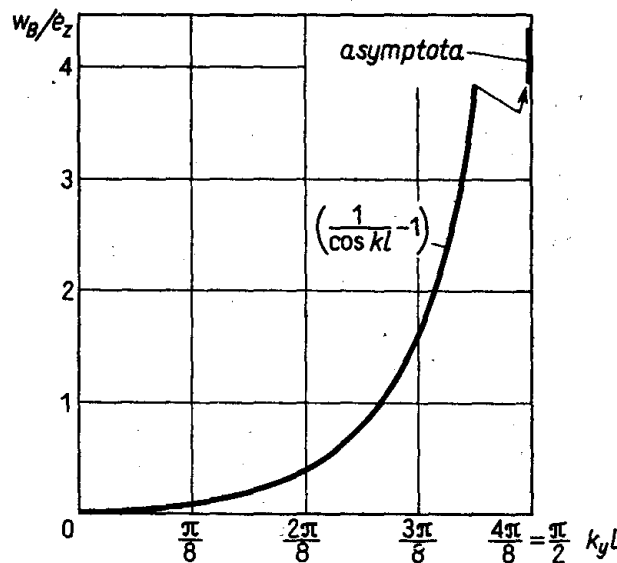
jako szukaną postać linii ugięcia. Wykorzystując wyniki (d) i (e) obliczamy z równania (a) moment gnący

$$M_y = P e_z \cos k_y x / \cos k_y l, \quad (f)$$

osiągający ekstremum w utwierdzonym przekroju ( $x = 0$ )

$$(M_y)_{\max} = P e_z / \cos k_y l. \quad (g)$$

Przeanalizujemy otrzymane rezultaty. Z równań (d) i (e) widać od razu, że ugięcie  $w$  zależy liniowo od mimośrodów  $e_z$ , a nieliniowo od siły  $P$ , ukrytej w argumentach<sup>(1)</sup>  $k_y x$  i  $k_y l$  funkcji cosinus. Z właściwości tej funkcji wynika, że ugięcie rośnie szybciej niż wzrost  $P$ . Fakt ten jest zrozumiały, gdyż wzrostowi siły towarzyszy wzrost rzędnych linii ugięcia. W rezultacie moment gnący jako iloczyn siły  $P$  przez odpowiednie ramie, a więc i krzywizna belki narastają szybciej niż sama siła. Całość zjawiska opisuje wykres (rys. 6.18). Odciętą jest tu  $k_y l$ , tj. wielkość związana z siłą  $P$ , a rzędną bezwymiarowa



Rys. 6.18. Bezwymiarowa strzałka ugięcia pręta z rys. 6.17

strzałka ugięcia, tj.  $w_B/e_z$ . Widać, że dla  $k_y l \rightarrow \pi/2$  strzałka  $w_B$  staje się wielokrotnie większa od  $e_z$ . Szczególną wartość  $P = P_{kr}$  odpowiadającą  $k_y l = \pi/2$  nazywamy *siłą krytyczną* lub *eulerowską* i wyznaczamy ją z (6.12), a mianowicie

$$k_y l = l \sqrt{P/EJ_y} = \pi/2,$$

skąd

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_y}{4l^2}. \quad (6.13)$$

<sup>(1)</sup> Wartości argumentu  $k_y l$  i  $k_y x$  są w radianach, albowiem iloczyn  $k$  (miano  $\text{cm}^{-1}$ ) i  $l$  lub  $x$  (miano  $\text{cm}$ ) daje liczbę oderwaną.

Fizyczny sens  $P_{kr}$  można zinterpretować jako tę siłę  $P$ , przy której ścispany<sup>(1)</sup> (bez mimośrodów) pręt może mieć dwie różne postacie równowagi: pierwotną, tj. gdy oś pręta zostaje prosta, i nową, tj. o osi wygiętej. To zjawisko nosi nazwę *utrąty stateczności* lub inaczej *wyboczenia pręta* i będzie później omówione.

W podobny sposób możemy określić ekstremalne naprężenie  $\sigma_e$  w niebezpiecznym przekroju  $A$ . Z wzoru (g) i (6.6) wynika

$$\sigma_e = |\sigma_{\min}| = (P/A) + (Pe_z/W_y \cos k_y l). \quad (h)$$

Jeśli  $k_y l \rightarrow \pi/2$ , tj.  $P \rightarrow P_{kr}$ , to nawet przy najmniejszym mimośrodku  $e_z \neq 0$  naprężenie  $\sigma_e$  osiągnie granicę plastyczności materiału, co wywoła trwałe odkształcenia i uczyni konstrukcję niezdatną do użytku. Ponieważ w realnych warunkach mimośród zawsze istnieje, wynika stąd, że w przypadku pojedynczego pręta krytyczna siła jest jednocześnie niszcząca.

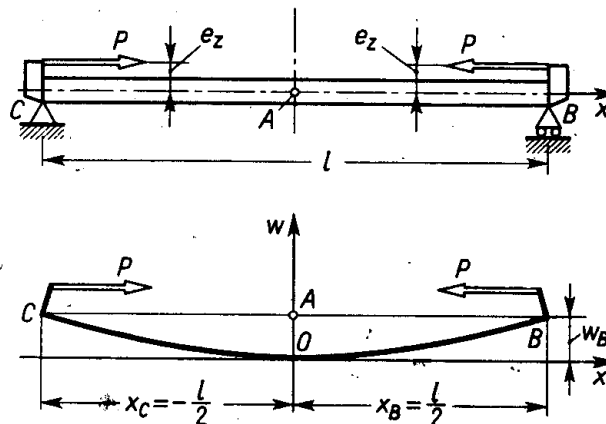
Na zakończenie analizy prześledzimy przypadek, gdy  $P \ll P_{kr}$ . Argumenty  $k_y l$  i  $k_y x$  są małe i wtedy możemy przyjąć

$$1 - \cos k_y x \approx (k_y x)^2/2 = Px^2/2EJ_y, \quad 1 - \cos k_y l \approx Pl^2/2EJ_y,$$

w rezultacie czego zamiast wzorów (d) i (e) otrzymamy

$$w \approx Pe_z x^2/2EJ_y, \quad w_B \approx Pe_z l^2/2EJ_y.$$

Powyższe wyniki są identyczne z przypadkiem wspornikowej belki (rys. 5.51c), gdy moment  $M_B^* = Pe_z$ . Oznacza to, że  $M_y(x) = Pe_z = \text{const}$ , a więc jest obliczony z pominięciem wpływu ugięcia lub, innymi słowy, przy założeniu słuszności zasady superpozycji. Podsumowując to powiemy, że przy jednoczesnym zginaniu i ścisaniu prętów można stosować superpozycję, jeśli siła wzdłużna jest znacznie mniejsza od krytycznej.



Rys. 6.19. Analiza pręta dwupodporowego ściskanego mimośrodowo

Otrzymane wyniki można wykorzystać w przypadku pręta podpartego przegubowo na końcach i ściskanego mimośrodowymi siłami  $P$  (rys. 6.19). Reakcje podpór są tu równe zero, linia ugięcia symetryczna, a każda połowka  $OB$  i  $OC$  jest w takich warunkach jak pręt z rys. 6.17. Wynika stąd, że wszystkie poprzednie wyniki można stosować w tym

<sup>(1)</sup> Gdy  $k_y l = \pi/2$  i  $e_z = 0$ , wówczas  $w_B = 0/0$  staje się nieoznaczone. Ponieważ  $k_y$  i  $e_z$  są od siebie niezależne, zatem reguły de'Hospitala nie można tu stosować i  $w_B$  może mieć pewną wartość skończoną, choćby  $e_z$  było nieskończenie małą dowolnego rzędu.

drugim zagadnieniu, jeśli tylko zamiast  $l$  wstawić  $l/2$ , a początek układu  $xw$  umieścić w środku  $O$  pręta odkształconego. W szczególności zamiast wzorów (d), (g) i (h) mamy odpowiednio

$$w_B = w_C = [e_z / \cos(k_y l/2)] - e_z, \quad (i)$$

$$(M_y)_{\max} = P e_z / \cos(k_y l/2), \quad (j)$$

$$\sigma_e = |\sigma_{\min}| = (P/A) + [P e_z / W_y \cos(k_y l/2)], \quad (k)$$

a w zamian wzoru (6.13) inną wartość siły krytycznej

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 E J_y}{l^2}. \quad (6.14)$$

Podobnie można wykorzystać wykres (rys. 6.18) wstawiając jedynie zamiast  $k_y l$  argument  $k_y l/2$ .

W powyższych rozważaniach milcząco założono, że zgięcie pręta zachodzi w płaszczyźnie działania momentu zginającego, a więc że jest ono proste, a oś  $y$  jest główną centralną osią przekroju. Jeśli siła lub siły ściskające są w dowolnej płaszczyźnie (rys. 6.11), to moment  $Pe$  rozkładamy na składowe  $Pe_z$  i  $Pe_y$ , działające w płaszczyznach zawierających osie główne. Analizę zginania w każdej z tych dwóch płaszczyzn prowadzimy oddzielnie dochodząc w wyniku do dwóch niezależnych równań typu (6.11), których rozwiązanie i dyskusja jest podobna do opisanej poprzednio. Postępowanie takie jest dozwolone (błąd rzędu 1‰), gdy przekrój pręta jest zwarty lub cienkościenny rurowy. Dla prętów cienkościennych otwartych, jak ceówka, zagadnienie jest bardziej złożone.

### Zadania

1. Pręt (rys. 6.17) o średnicy  $d = 2$  cm i długości  $l = 50$  cm obciążono siłą ściskającą  $P = 5$  kN. Jaki może być mimośród  $e_z$ , aby naprężenie  $|\sigma_e|$  nie przekroczyło  $\sigma_0 = 100$  MPa?  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa

Odp.  $J_y = 0,785$  cm<sup>4</sup>,  $EJ_y = 1,57 \cdot 10^3$  N m<sup>2</sup>,  $k_y = \sqrt{P/EJ_y} = 1,782$  m<sup>-1</sup>,  $k_y l = 0,891$  rad = 51,1°,  $\cos k_y l = 0,629$  i z wzoru (h)

$$e_z = W_y \cos k_y l [\sigma_0 - (P/A)] / P = 8,3 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 8,3 \text{ mm}.$$

2. Jaka jest rzeczywista strzałka ugięcia w pręcie z zadania 1, a jaką otrzymalibyśmy zaniedbując wpływ ugięcia na momenty gnące?

Odp. Z wzoru (d)  $w_B = 8,3[(1/0,629) - 1] = 4,9$  mm, natomiast wartość przybliżona wynosi  $w_B \approx e_z(k_y l)^2/2 \approx 3,3$  mm, czyli błąd jest 33%.

3. Pręt (rys. 6.19) o pełnym kwadratowym przekroju  $a \times a$  zastąpiono kwadratową rurą o tej samej długości z tego samego materiału i otworze  $a \times a$ . Jaka ma być grubość  $\delta$  ścianki rury, aby siła  $P_{kr}$  została ta sama? Jaki jest stosunek mas obydwóch prętów?

Odp.  $J_y$  ma zostać to samo, skąd  $(a + 2\delta)^4 - a^4 = a^4$  i  $\delta = 0,094a$ . Stosunek mas  $Q_2/Q_1 = [(a + 2\delta)^2 - a^2]/a^2 = \sqrt{2} - 1 = 0,414$ . Dla tej samej wartości  $P_{kr}$  rura jest około 2,4 razy lżejsza. W tych zatem przypadkach, gdy konstrukcja ma być lekka, a jednocześnie wartość  $P_{kr}$  duża, celowe jest stosowanie przekrojów rurowych. Fakt ten obserwujemy w przyrodzie, jak w słomie, bambusie itp.

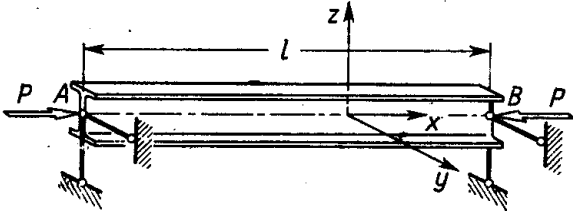
4. W pręcie (rys. 6.17) powiększono dwukrotnie *wszystkie* wymiary. Jak zmieni się wartość siły  $P_{kr}$ ?

Odp. Wzrośnie czterokrotnie.

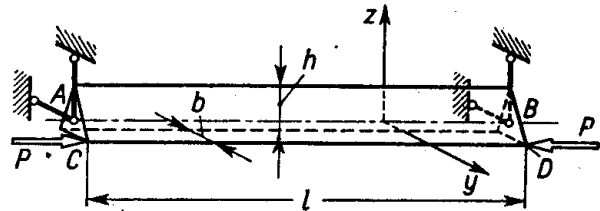
5. Stalowa dwuteówka ( $J_y = 171$  cm<sup>4</sup>,  $J_z = 12,2$  cm<sup>4</sup>,  $A = 10,6$  cm<sup>2</sup>,  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa) o długości-

ci  $l = 2,5$  m ściskana jest siłami  $P$  (rys. 6.20). Wyznaczyć najmniejszą wartość siły krytycznej  $(P_{kr})_{\min}$  i odpowiadającą jej wartość naprężeń ścisających.

Odp.  $(P_{kr})_{\min}$  odpowiada wygięciu w płaszczyźnie  $xy$  i  $(P_{kr})_{\min} = \pi^2 EJ_z / l^2 \approx 38,5$  kN oraz  $|\sigma| = (P_{kr})_{\min} / A = 36,4$  MPa.



Rys. 6.20.



Rys. 6.21.

6. Duralowy ( $E = 7 \cdot 10^4$  MPa) pręt o przekroju równoramiennego trójkąta ( $b = 6$  cm,  $h = 12$  cm) i długości  $l = 2$  m obciążono w punktach  $C$  i  $D$  mimośrodkowymi siłami  $P = 40$  kN (rys. 6.21). Wyznaczyć ekstremalne naprężenia ścisające i rozciągające.

Odp.  $J_y = bh^3/36 = 288$  cm<sup>4</sup>,  $J_z = b^3h/48 = 54$  cm<sup>4</sup>,  $k_y l/2 = 0,444$  rad,  $k_z l/2 = (l/2) \sqrt{P/EJ_z} = 1,028$  rad. Momenty gnące w niebezpiecznym przekroju (w środku rozpiętości) są według wzoru (j)

$$(M_y)_{\max} = -Pe_z / \cos(k_y l/2) = -Ph/3 \cos(k_y l/2) = -1770 \text{ Nm},$$

$$(M_z)_{\max} = Pe_y / \cos(k_z l/2) = Pb/2 \cos(k_z l/2) = 2330 \text{ Nm}.$$

Ekstremalne naprężenia ścisające  $\sigma''$  występują we włóknie  $CD$

$$\sigma'' = -(P/A) - [(M_y)_{\max}/J_y](-h/3) - [(M_z)_{\max}/J_z](b/2) = -165,4 \text{ MPa},$$

a maksymalne rozciągające  $\sigma'$  we włóknie symetrycznie położonym

$$\sigma' = -(P/A) - [(M_y)_{\max}/J_y](-h/3) + [(M_z)_{\max}/J_z](b/2) = 94,0 \text{ MPa}.$$

## 6.4. Naprężenia krytyczne i smukłość pręta

Pojęcie siły krytycznej  $P_{kr}$ , jako obciążenia niszczącego pręt ścisany, stanowi punkt wyjścia do oceny bezpieczeństwa tego pręta. Zagadnienie to prześledzimy na przykładzie pręta podpartego przegubowo na końcach (rys. 6.19), dla którego

$$P_{kr} = \pi^2 EJ_y / l^2. \quad (a)$$

Bezwzględną wartość naprężenia normalnego odpowiadającego  $P_{kr}$ , gdy mimośród  $e = 0$ , nazywamy *naprężeniem krytycznym*  $\sigma_{kr}$ , tj.

$$\sigma_{kr} = P_{kr} / A, \quad (6.15)$$

Wstawiając do (6.15) wyrażenie (a) i wykorzystując pojęcie promienia bezwładności  $i_y$  (wzór 6.9) otrzymujemy

$$\sigma_{kr} = \pi^2 EJ_y / Al^2 = \pi^2 Ei_y^2 / l^2 = \pi^2 E / (l/i_y)^2. \quad (b)$$

Występujący tu bezwymiarowy stosunek  $l/i_y$ , zależny tylko od geometrii pręta, nazywamy *smukłością* pręta i oznaczamy

$$\lambda = l/i_y. \quad (6.16a)$$

Wprowadzając to oznaczenie do (b) mamy ostatecznie

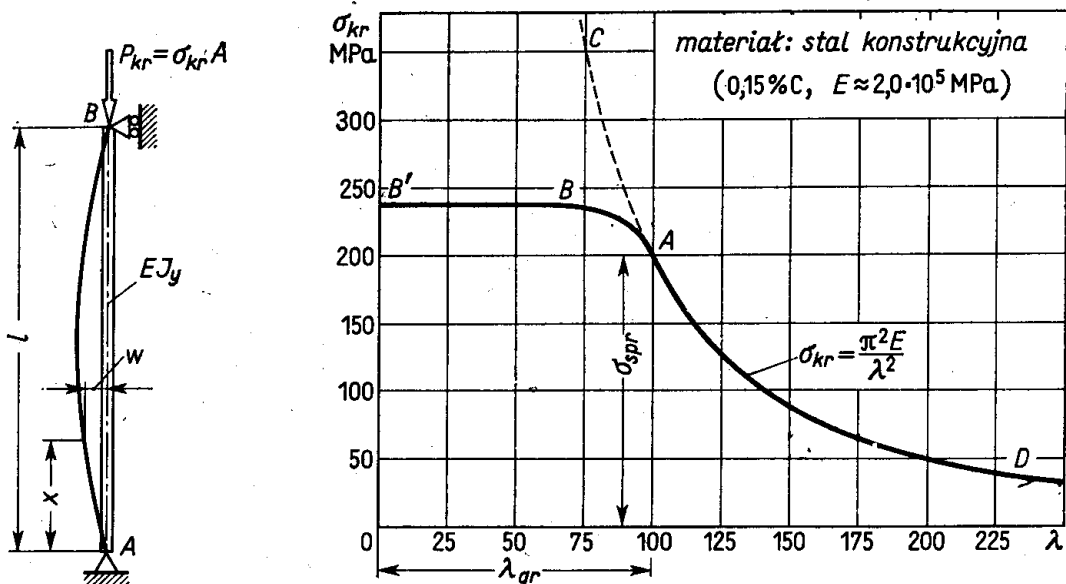
$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (6.17)$$

Podane zależności odpowiadają utracie stateczności lub inaczej wyboczeniu, gdy główna centralna oś  $y$  przekroju jest obojętna. Podobnie możemy zbadać przypadek, gdy osią obojętną przy wyboczeniu jest oś  $z$ . W wyniku otrzymamy ten sam wzór (6.17), z tym tylko, że smukłość pręta określona jest teraz jako

$$\lambda = l/i_z. \quad (6.16b)$$

Jak widzimy, do jednoznacznego określenia smukłości pręta konieczne jest dodatkowo podanie płaszczyzny, w której zachodzi wyboczenie. Bez tej informacji pojęcie smukłości jest wieloznaczne.

Zależność (6.17) przedstawiamy zazwyczaj w postaci wykresu  $\sigma_{kr} = f(\lambda)$ . Otrzymana w wyniku (rys. 6.22) krzywa CAD, tzw. *hiperbola Eulera*, wykazuje jasno, że  $\sigma_{kr}$  dla prętów



Rys. 6.22. Analiza naprężenia krytycznego w funkcji smukłości

o dużej smukłości może być znacznie mniejsze od granicy sprężystości  $\sigma_{spr}$  materiału pręta. Uświadamiając sobie, że wartości  $\sigma_{kr}$  towarzyszy zniszczenie pręta, wnioskujemy, że zjawisko wyboczenia jest dodatkowym czynnikiem limitującym bezpieczeństwo konstrukcji. Biorąc przykładowo stalowy pręt o smukłości  $\lambda = 200$ , odczytujemy z wykresu  $\sigma_{kr} \approx 50$  MPa niezależnie od tego, czy stal<sup>(1)</sup> jest pospolita ( $\sigma_{spr} \approx 220$  MPa), czy szlachetna stopowa i obrobiona cieplnie ( $\sigma_{spr} \approx 1000$  MPa). W obydwoch przypadkach wykorzystanie materiału jest niedostateczne, stanowi bowiem odpowiednio 23% i 5% tego, co można by osiągnąć z uwagi na właściwości materiału. Sytuację można poprawić tylko przez zmniejszenie smukłości  $\lambda$ , co przy ustalonej długości  $l$  pręta sprowadzą się do

<sup>(1)</sup> Jest faktem, że niewielkie domieszki stopowe, obróbka cieplna itp. nie wpływają w sposób istotny na wartość  $E$ .

zwiększenia  $J_y$  (lub  $J_z$ ) i zwiększenia  $i_y$  (lub  $i_z$ ). Efekt ten można osiągnąć bez zwiększania pola przekroju, a więc ciężaru pręta, przez rozłożenie materiału daleko od osi (zadanie 3 art. 6.3).

Gdy smukłość  $\lambda \rightarrow 0$ , wówczas, jak widać z wykresu, naprężenie  $\sigma_{kr} \rightarrow \infty$ . W rzeczywistości tak nie jest. Stosowalność hiperboli Eulera jest ograniczona założeniem, że materiał pręta podlega prawu Hooke'a. Określając bowiem  $P_{kr}$  korzystaliśmy z równania linii ugięcia (5.20), u którego podstaw leży właśnie to założenie. Z tego powodu krzywa  $CAD$  daje prawidłowe wyniki tylko wtedy, gdy  $\sigma_{kr} < \sigma_{prop}$ . Podstawiając we wzorze (6.17)  $\sigma_{kr} = \sigma_{prop}$  otrzymujemy tę *graniczną smukłość*  $\lambda_{gr}$

$$\lambda_{gr} = \pi \sqrt{E/\sigma_{prop}}, \quad (6.18)$$

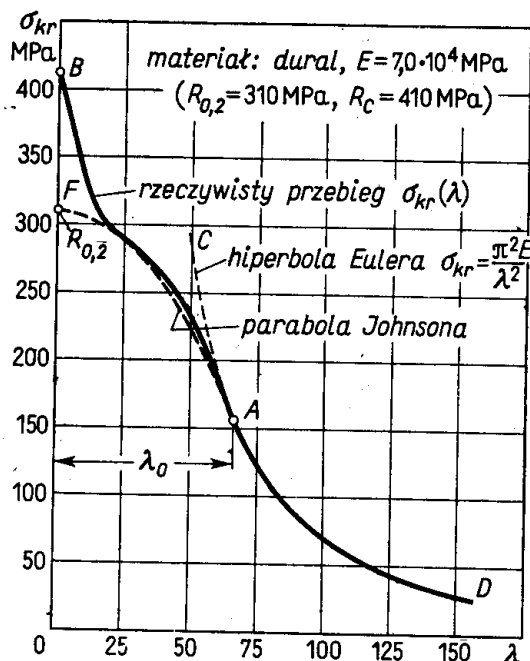
poniżej której *nie wolno* używać wzoru (6.17). Tak na przykład dla stali o  $\sigma_{prop} \approx 200$  MPa, mamy  $\lambda_{gr} \approx 100$  i stosowalność wzoru (6.17) ograniczoną do części  $AD$  hiperboli Eulera (rys. 6.22).

Zjawisko wyboczenia zachodzi także, gdy smukłość  $\lambda < \lambda_{gr}$ , wtedy jednak występują odkształcenia trwałe. Przy takim *wyboczeniu niesprężystym*, tj. gdy  $0 < \lambda < \lambda_{gr}$ , zasadniczą cechą jest to, że *postać wykresu  $\sigma_{kr}(\lambda)$  zależy od postaci wykresu ściskania  $\sigma(\epsilon)$  analogicznego do wykresu rozciągania* (rys. 1.16). I tak jeśli materiał pręta ma wyraźną granicę plastyczności  $R_e$  (rys. 1.16a), to wykres  $\sigma_{kr}(\lambda)$  ma przebieg według linii  $ABB'$  (rys. 6.22). Rzędna poziomego odcinka  $BB'$  jest  $\sigma_{kr} = R_e$ , a odcinek  $AB$  odpowiada złagodzonemu (nieostremu) przejściu na wykresie  $\sigma = f(\epsilon)$  między<sup>(1)</sup>  $\sigma_{prop}$  a  $R_e$ . Nieco inny jest przebieg  $\sigma_{kr}$ , gdy materiał nie ma wyraźnej granicy plastyczności (rys. 1.16b). Dla materiałów tych (stale stopowe, wysoko-węglowe lub stopy lekkie) rzeczywisty wykres  $\sigma_{kr}$  (rys. 6.23) wykazuje brak zaakcentowanego poprzednio poziomego odcinka  $BB'$ . Ponadto dla bardzo małych smukłości wartość  $\sigma_{kr}$  bliska jest doraźnej wytrzymałości  $R_c$  na ściskanie, a nie  $R_e$ , jak poprzednio.

W praktyce nie zawsze dysponujemy wspomnianymi wykresami i wtedy posługujemy się zależnościami przybliżonymi. Jedną z nich stosowaną dla materiałów bez wyraźnej granicy plastyczności jest tzw. *parabola Johnsona* (rys. 6.23). Jej wierzchołek  $F$  ma odciętą  $\lambda = 0$ , rzędną  $(\sigma_{kr})_{\lambda=0} = R_{0,2}$ , tj. umownej granicy plastyczności. Ponadto parabola ta jest styczna do hiperboli Eulera  $\sigma_{kr} = \pi^2 E/\lambda^2$ , a punkt styczności  $A$  ma współrzędne

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{2E/R_{0,2}}, \quad (\sigma_{kr})_A = R_{0,2}/2. \quad (6.19)$$

<sup>(1)</sup> Patrz rys. 1.16a, na którym  $\sigma_{prop}$  odpowiada punktowi  $A$ , a  $R_e$  odpowiada punktowi  $B$ .



Rys. 6.23. Typowy wykres  $\sigma_{kr}(\lambda)$  dla materiału bez wyraźnej granicy plastyczności

Samo równanie<sup>(1)</sup> paraboli  $FA$  jest

$$\sigma_{kr} = R_{0,2} [1 - (\lambda^2/2\lambda_0^2)]. \quad (6.20)$$

Jak widać z wykresu (rys. 6.23), poważniejsze różnice między rzeczywistym przebiegiem  $\sigma_{kr}(\lambda)$  a rzędnymi paraboli (6.20) występują dla prętów bardzo krępych ( $\lambda < 20$ ). W przedziale średnich smukłości ( $20 < \lambda < \lambda_0$ ), mającym największe znaczenie techniczne, zgodność ta jest bardzo dobra. To właśnie powoduje, że wzorem (6.20) posługujemy się często w praktyce. W literaturze, zwłaszcza dotyczącej części maszyn, stosuje się również inne formuły, jak wzór Tetmajera, zastępujący rzeczywisty przebieg  $\sigma_{kr}(\lambda)$  zależnością liniową

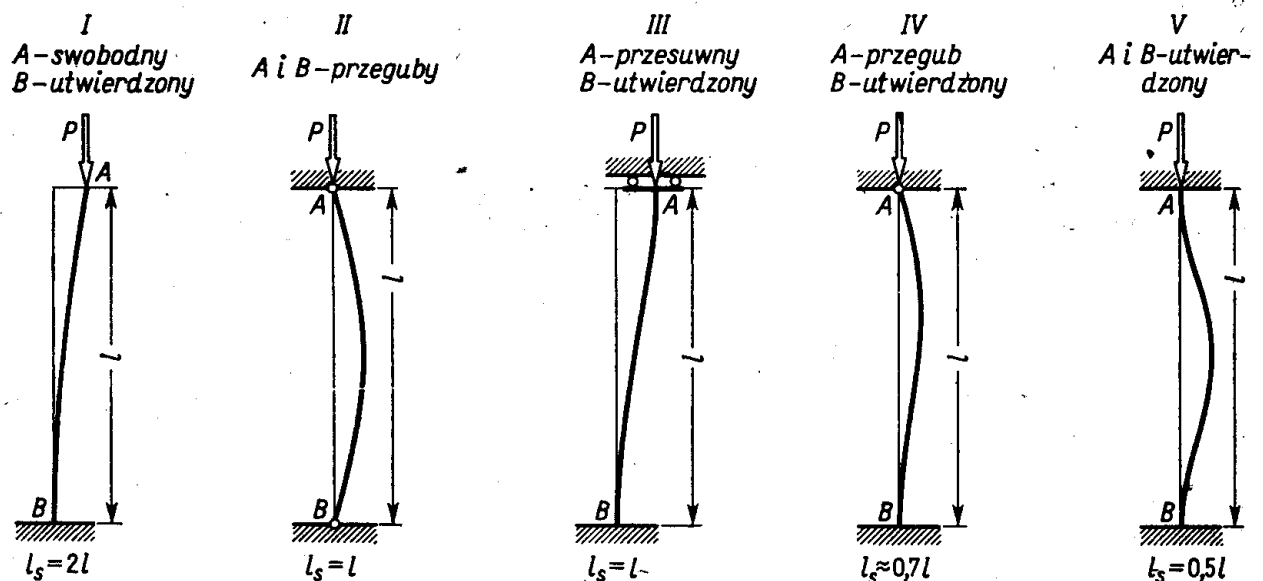
$$\sigma_{kr} = B_1 + B_2 \lambda,$$

w której stałe  $B_1$  i  $B_2$  są każdorazowo ustalane w zależności od gatunku materiału.

Omówiony przypadek ściskania pręta zakończonego przegubami (rys. 6.19) nazywa się *podstawowym*, gdyż występuje najczęściej w praktyce. Dla innych przypadków, jak podany na rys. 6.17, można przeprowadzić podobną analizę. Jest to jednak zbędne, albowiem dla pręta tego siła  $P_{kr}$  (wzór 6.13) da się przedstawić jako

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_y}{4l^2} = \frac{\pi^2 EJ_y}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EJ_y}{l_s^2},$$

gdzie  $l_s = 2l$ . Pręt ten zachowuje się więc jak pręt w przypadku podstawowym o długości  $l_s$ , tzw. *długości swobodnej*, i wszystkie wyniki analizy przypadku podstawowego (w zakresie



Rys. 6.24. Określenie  $l_s$  w typowych przypadkach podparcia pręta

sprężystym i niesprężystym) mogą być od razu wykorzystane. Podobnie postępujemy i w innych przypadkach podparcia pręta (rys. 6.24), wprowadzając za każdym razem odpowiednią długość swobodną  $l_s$ , której określenie szczegółowo omówione jest w rozdz. 15.

<sup>(1)</sup> Biorąc ogólnie, równanie (6.20) ma postać:  $\sigma_{kr} = B_1 - B_2 \lambda^2$ , ze stałymi  $B_1$  i  $B_2$ . Z warunku  $(\sigma_{kr})_{\lambda=0} = R_{0,2}$  mamy  $B_1 = R_{0,2}$ . W punkcie  $A$  zachodzi równość rzędnych oraz równość pochodnych, czyli  $B_1 - B_2 \lambda_0^2 = \pi^2 E / \lambda_0^2$  oraz  $-2B_2 \lambda_0 = -2\pi^2 E / \lambda_0^3$ , skąd otrzymujemy  $B_2$  i  $\lambda_0$ , a następnie zależność (6.20).



**Zadania**

1. Zakończona przegubami ściskana rura ze stali o 0,15% C ma wymiary  $d_z = 8$  cm,  $d_w = 7$  cm i długość  $l = 6$  m. Ilorotnie zwiększy się naprężenie krytyczne, jeśli utwierdzimy: a) jeden koniec rury, b) obydwie końce?

Od p. Pierwotnie  $\lambda = 228$ , po modyfikacji (a)  $\lambda' \approx 0,7\lambda = 160$ , po modyfikacji (b)  $\lambda'' = 0,5\lambda = 114$ . Wzór (6.17) można więc stosować. W wyniku modyfikacja (a) daje około 2-krotny, a modyfikacja (b) – 4-krotny wzrost  $\sigma_{kr}$ .

2. Jak zmienią się wyniki zadania 1, gdy długość  $l = 3$  m?

Od p. Pierwotne  $\lambda = 114$ , po modyfikacji (a)  $\lambda' = 80$ , po (b)  $\lambda'' = 52$ . Po modyfikacjach wyboczenie jest niesprężyste. Z rysunku 6.22 odczytujemy:  $(\sigma_{kr})_{\lambda=114} = 154$  MPa,  $(\sigma_{kr})_{\lambda=80} = 232$  MPa,  $(\sigma_{kr})_{\lambda=52} = 237$  MPa. Modyfikacja (a) daje 1,5-krotny, a (b) 1,54-krotny wzrost  $\sigma_{kr}$ , a więc znacznie mniej niż poprzednio.

3. Wyznaczyć  $\sigma_{kr}$  dla zakończonego przegubami duralowego ( $E = 7,0 \cdot 10^4$  MPa,  $R_{0,2} = 280$  MPa,  $\sigma_{prop} \approx 180$  MPa) pręta o smukłości  $\lambda = 50$ .

Od p.  $\lambda < \lambda_{gr}$ , z (6.19) jest  $\lambda_0 \approx 70$ ; z (6.20) jest  $\sigma_{kr} \approx 210$  MPa.

4. W poprzednim zadaniu  $\lambda_{gr} = 62$ , a  $\lambda_0 = 70$ . Gdy  $\lambda_{gr} < \lambda < \lambda_0$ , wówczas z wzorów (6.17) i (6.20) otrzymujemy różne wyniki. Któremu z nich wierzyć?

Od p. Prawidłowy jest wzór (6.17), bo (6.20) jest tylko przybliżeniem. Różnice są jednak małe i bez praktycznego znaczenia.

**6.5. Wymiarowanie prętów ściskanych**

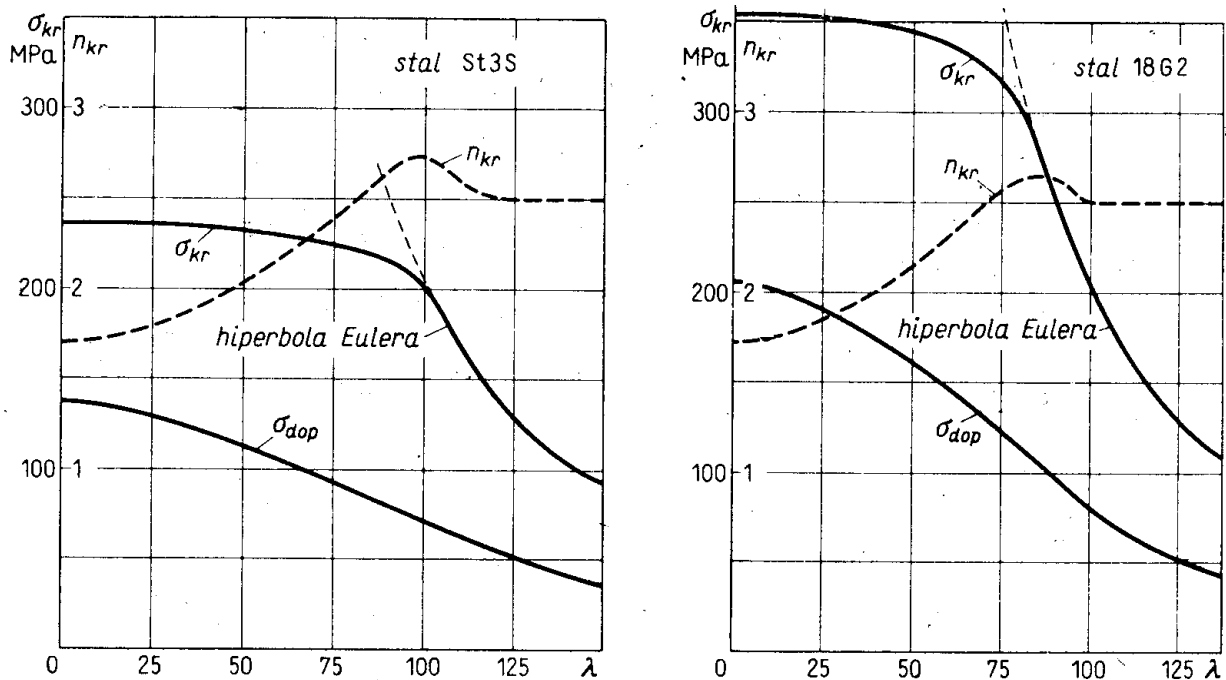
Omówione w art. 6.1 ÷ 6.4 przypadki należą do tych zagadnień wytrzymałości złożonej, w których kryterium bezpieczeństwa jest identyczne, jak przy prostym rozciąganiu lub ściskaniu i sprowadza się do porównania ekstremalnego naprężenia normalnego z wartością dopuszczalną. Ten prosty schemat oceny bezpieczeństwa komplikuje jednak zjawisko wyboczenia. Zjawisko to, zademonstrowane tu jako graniczny przypadek mimośrodowego ściskania, stanowi pod względem poznawczym wyłom, jest bowiem przypadkiem, gdy nie obowiązuje reguła wymiarów początkowych. Wartość siły krytycznej stanowiąc wielkość charakterystyczną danego ustroju steruje jednocześnie metodą analizy. Jeśli mianowicie obciążenie wzdłużne jest małe w stosunku do siły krytycznej, np. 10 ÷ 15%, to z techniczną dokładnością stosujemy zasadę superpozycji jak w art. 6.2. Jeśli ten stosunek jest większy, to w analizie należy uwzględnić odkształcenia pręta, jak to zrobiono w art. 6.3.

W odróżnieniu od poprzednich zagadnień ocena bezpieczeństwa prętów ściskanych różni się tym, że pewna istotna grupa obciążeń, a mianowicie momenty gnące wywołane nieuniknionymi błędami wykonania, nie jest określona jednoznacznie, lecz jest zmienną losową. Innymi słowy zagadnienia z rys. 6.19 i 6.22 różnią się tym, że w pierwszym z nich wielkość  $e_z$  jest z pewną dokładnością zdeterminowana, w drugim natomiast nieokreślona. W tej sytuacji jest naturalne, że bezpieczeństwo ściskanego pręta oceniamy konfrontując tę część obciążenia, którą znamy, tj. siłę ściskającą, z tą siłą  $P_{kr}$ , która na pewno wywoła zniszczenie pręta.

W zagadnieniach *kontroli* punktem wyjścia jest wykres  $\sigma_{kr}(\lambda)$  dla danego materiału.

Mając ten wykres, jak na rys. 6.22 lub 6.23, i znając smukłość pręta odpowiadającą najmniejszemu promieniowi bezwładności możemy wyznaczyć  $\sigma_{kr}$ , a więc i siłę niszczącą

$P_{kr} = \sigma_{kr} A$ . Z kolei można określić siłę dopuszczalną  $P_{dop}$  dzieląc  $P_{kr}$  przez wymagany współczynnik bezpieczeństwa  $n_{kr}$ . Przy doborze tego współczynnika należy uwzględnić, że ze wzrostem smukłości pręta rośnie wpływ niedokładności wykonania<sup>(1)</sup>. Z tego powodu racjonalne jest przyjąć zmienne  $n_{kr}$ , a mianowicie rosnące dla prętów bardziej smukłych. Przykładem tego są wykresy (rys. 6.25) dla dwóch stali (St 3S i 18 G2) często



Rys. 6.25. Typowe wykresy  $\sigma_{kr}$ ,  $n_{kr}$ ,  $\sigma_{dop}$  dla stali konstrukcyjnych  
 Stal St 3 S (0,22% C, 0,65% Mn, 0,07 Si,  $R_e = 235$  MPa,  $R_m = 370-460$  MPa),  
 Stal 18 G 2 (0,18% C, 1,3% Mn,  $R_e = 350$  MPa,  $R_m = 510-630$  MPa).

stosowanych w praktyce. Jak widzimy, współczynnik  $n_{kr}$  rośnie stopniowo od wartości 1,71 dla  $\lambda = 0$  do wartości 2,5 stałej dla  $\lambda > \lambda_{gr}$ . Określone stąd wartości naprężeń dopuszczalnych  $\sigma_{dop}$  można wykorzystać w zagadnieniach kontroli, tj. gdy dana jest siła  $P$  i wymiary pręta, a mamy stwierdzić czy  $\sigma = P/A$  są mniejsze lub równe  $\sigma_{dop}$ .

Drugi rodzaj zagadnień, tj. *kształtowania* (doboru wymiarów), prętów ściskanych, rozwiązujemy zazwyczaj metodą kolejnych prób. I tak mając dany rodzaj materiału, a więc i wykres  $\sigma_{kr}(\lambda)$ , oraz wartość siły  $P$  dobieramy wstępnie wymiary przekroju, skąd określamy kolejno  $A$  oraz  $i_y$  lub  $i_z$ , smukłość  $\lambda$ , wartość  $\sigma_{kr}$  i  $P_{kr} = \sigma_{kr} A$  oraz wartość współczynnika  $n_{kr} = P_{kr}/P$ . Jeśli ta ostatnia jest równa lub niewiele większa od wymaganej, to uważamy, że dobór jest prawidłowy. W przypadku przeciwnym dobór należy powtórzyć.

Na zakończenie warto przypomnieć, że rola  $P_{kr}$  jako siły niszczącej odnosi się do pojedynczego pręta, którego obciążenie nie zależy od współpracy innych elementów. Tak

<sup>(1)</sup> Weźmy dwa pręty (rys. 6.19) o jednakowym przekroju i długościach  $l$  i  $2l$ . Mimośród  $e_z$  jako zmienna losowa jest ten sam, zależy bowiem od tolerancji wykonania, ta zaś zależy od poprzecznych wymiarów pręta, np. dokładność umieszczenia okuć. Przy tej samej sile  $P$  naprężenia będą większe w pręcie smuklejszym (wzór h art. 6.3), gdyż  $\cos 2k_y l < \cos k_y l$ .

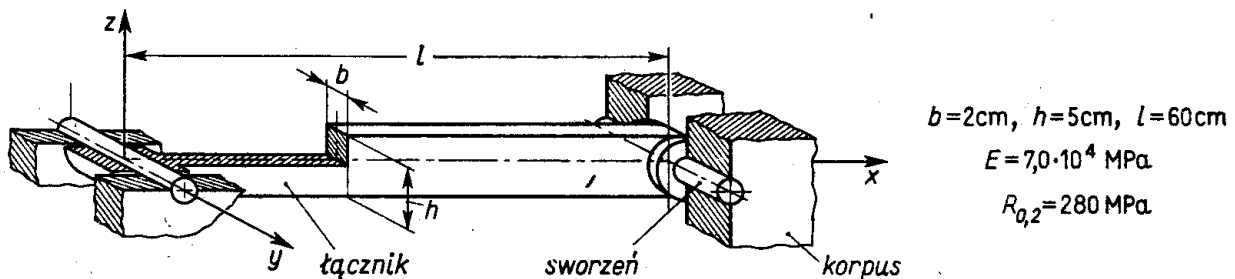
jest na przykład w kratownicach statycznie wyznaczalnych (rys. 2.9), w których siły wzdłużne zależą tylko od konfiguracji i obciążenia węzłów. W innych sytuacjach, gdy obciążenie pręta zależy od odkształceń, wyboczenie jego nie musi być równoznaczne ze zniszczeniem ustroju (patrz rysunek 15.24).

### Zadania

1. Dwuteówka (rys. 6.20) ze stali St 3S ma długość  $l = 1$  m. Biorąc  $J_y = 171 \text{ cm}^4$ ,  $J_z = 12,2 \text{ cm}^4$ ,  $A = 10,6 \text{ cm}^2$  oraz wykres  $\sigma_{\text{dop}}(\lambda)$  z rys. 6.25 orzec, czy może ona przenosić siłę  $P = 70 \text{ kN}$ ?

Odp. Tak, bo  $\lambda = l/i_z = 93$  i  $\sigma_{\text{dop}} = 79 \text{ MPa}$ ,  $P_{\text{dop}} = 84 \text{ kN} > P$ .

2. Orzec, czy duralowy łącznik o prostokątnym przekroju (rys. 6.26) może być obciążony siłą ściskającą  $P = 80 \text{ kN}$ , jeśli wymagany współczynnik bezpieczeństwa  $n_{\text{kr}} = 2,5$ ?



Rys. 6.26.

Odp. Tak. Decyduje możliwość wyboczenia w płaszczyźnie  $xy$ , gdyż  $i_z = b/\sqrt{12} = 0,58 \text{ cm}$ ,  $i_y = h/\sqrt{12} = 1,45 \text{ cm}$ ,  $l_s = l$  i  $\lambda = l/i_z = 52,0$  jest większa niż przy wyboczeniu w płaszczyźnie  $xz$ , dla którego  $i_y = h/\sqrt{12} = 1,45 \text{ cm}$ ,  $l_s = l$  i  $\lambda = 41,5$ . Posługując się parabolą Johnsona (zadanie 3 art. 6.4) dla  $\lambda = 51,5$  mamy  $\sigma_{\text{kr}} = 243 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{\text{dop}} = 97 \text{ MPa}$  i  $P_{\text{dop}} = 97 \text{ kN} > P = 80 \text{ kN}$ , c.b.d.d.

3. Dobrać średnicę  $d$  stalowego pręta utwierdzonego na jednym końcu, a przegubowo podpartego na drugim, aby przy długości  $l = 2$  m i sile ściskającej  $P = 75 \text{ kN}$  miał on współczynnik  $n_{\text{kr}} = 4$ . Dane:  $E = 2,03 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{\text{prop}} = 280 \text{ MPa}$ .

Odp. Zakładamy, że smukłość pręta  $\lambda > \lambda_{\text{gr}} \approx 85$ . Biorąc z rys. 6.24  $i_s \approx 0,7l = 1,4 \text{ m}$ , mamy  $J_y = n_{\text{kr}} Pl_s^2/\pi^2 E = 29,4 \text{ cm}^4$ , skąd  $d = \sqrt[4]{64 J_y/\pi} = 4,95 \text{ cm}$ , a  $i_y = d/4 \approx 1,25 \text{ cm}$ . Smukłość  $\lambda = l_s/i_y = 112 > \lambda_{\text{gr}}$ , a więc założenie początkowe jest prawidłowe i  $d \approx 5 \text{ cm}$ .

4. Zakończona przegubami kwadratowa rura ze stali St 3S o grubości ścianki  $\delta = 5 \text{ mm}$  i długości  $l = 5$  m ma przenosić siłę  $P = 400 \text{ kN}$ . Biorąc  $\sigma_{\text{dop}}(\lambda)$  z rys. 6.25, wyznaczyć wymiar zewnętrzny  $a$  przekroju rury.

Rozwiązanie. Ponieważ  $i_y = i_z = \sqrt{[a^2 + (a-2\delta)^2]/12}$ ; zatem  $a = \delta + \sqrt{6i_y^2 - \delta^2}$ . Aby określić przedział, w którym znajduje się szukane  $\lambda$ , weźmy  $\lambda = \lambda_{\text{gr}} \approx 100$ , wtedy  $i_y = l/\lambda = 5 \text{ cm}$  i  $a = 12,7 \text{ cm}$ . Obliczając  $A = a^2 - (a-2\delta)^2 = 24,4 \text{ cm}^2$  i  $\sigma = P/A \approx 164 \text{ MPa}$  widzimy z rys. 6.25, że  $\sigma > (\sigma_{\text{dop}})_{\lambda=100}$ , a różnica  $\Delta\sigma = \sigma - \sigma_{\text{dop}} = 74 \text{ MPa}$ . Wynika stąd, że szukane  $\lambda$  jest w przedziale smukłości (0,100). Weźmy wartość pośrednią  $\lambda = 50$ , dla której obliczone jak poprzednio  $i_y = 10 \text{ cm}$ ,  $a \approx 25,0 \text{ cm}$ ,  $A = 49 \text{ cm}^2$ ,  $\sigma = 81,5 \text{ MPa}$ ,  $(\sigma_{\text{dop}})_{\lambda=50} = 114 \text{ MPa}$ , a różnica  $\Delta\sigma = \sigma - \sigma_{\text{dop}} = -32,5 \text{ MPa}$ . Z liniowej interpolacji  $\Delta\sigma$  między  $\lambda = 100$  i  $\lambda = 50$  mamy dla  $\Delta\sigma = 0$  w pierwszym przybliżeniu  $\lambda = 65$ ,

(1) Umocowanie sworzni w korpusie wyklucza obrót końców łącznika, i schemat odkształceń jest według wariantu V (rys. 6.24).